The Betti numbers of the moduli space of stable sheaves of rank 2 on P

吉岡, 康太

代数幾何学シンポジウム記録
1992年度　pp.40-54

The Betti numbers of the moduli space of stable sheaves of rank 2 on $\mathbb{P}^2$

京大 理　　吉岡康太

$\mathbb{P}^2$上の rank が r で Chern 類が c_1, c_2 である stable sheaf の moduli space $M(r, c_1, c_2)$ の Betti 数を $r=2$, $c_1=-1$ の時に計算するという話です。$\mathbb{P}^2$上で考えることの理由の1つは、一般の曲面だと難かしいので（もし計算できたとすると、moduli が空でないか？ とか 連結成分の数、などについても情報が得られた事になる。）、最も基本的な（？）曲面である $\mathbb{P}^2$の場合に考えるということ、もう1つは S^4上の instanton との関連から、$\mathbb{P}^2$にかぎっても十分に研究する価値があるからである。（詳しくは [M 5] を参照） さて $M(r, c_1, c_2)$ の topology に関して今までわかっている事としては、

Th 1　Drezet, Ellingsrud-Strømme ($r=2$) Fogarty ($r=1$)
$\dim M(r, c_1, c_2) > 0$ の時 Picard 群は $\mathbb{Z}$ か

$\mathbb{Z}^{\oplus 2}$に同型である。

$M(r, c_1, c_2)$はunirationalになる事が知られているので、

$$H^2(M(r, c_1, c_2), \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Pic}(M(r, c_1, c_2))$$

となる。又cohomology環については、

Th 2 Ellingsrud − Strømme

$M = M(r, c_1, c_2)$とおき 又 $-r < c_1 \leq 0$ と正規化して考える。
今 $g.c.d.(r, c_1, \binom{c_1+1}{2} - c_2) = 1$ とする。(従って universal family が存在する [M 2]) $\pi : M \times \mathbb{P}^2 \longrightarrow M$ を射影, $\mathcal{E}$ を universal family とする。すると、
Chow群 $A^*(M)$ は cohomology環 $H^*(M, \mathbb{Z})$ と同型で、
$R^1\pi_*\mathcal{E}(n)$ $(n = -2, -1, 0)$ の Chern類で生成される。

尚彼らは生成元の間の関係式についても調べている。
さて moduli の Betti数に関しては、$r = 1$ つまり Hilbert scheme の場合は Ellingsrud − Strømme [E−S 1] により, Picard 群が $\mathbb{Z}$ に同型の時は Drezet [D 2] により計算されている。$r = 2$ の時について次が成立する。
まず $p(M(r, c_1, c_2), z)$ を $M(r, c_1, c_2)$ の Poincaré 多項式とする。

Th 3

$$\sum_n P(M(2,-1,n),z)t^n = \frac{\prod_{d\geq 1} Z_{z^2}(\mathbb{P}^2,\ z^{2(2d-1)}t^d)^2}{\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{2n(2n-1)}t^{n^2}\right)} \times$$

$$\frac{1}{z^2-1}\left(\sum_{b\geq 0}\left(\frac{z^{2(b+1)(2b+1)}}{1-z^{8(b+1)}t^{2b+1}} - \frac{z^{2b(2b+5)}}{1-z^{8b}t^{2b+1}}\right)t^{(b+1)^2}\right)$$

ここで $Z_q(\mathbb{P}^2,t) = \dfrac{1}{(1-t)(1-qt)(1-q^2t)}$

($\mathbb{P}^2$ の $\mathbb{F}_q$ 上の zeta 関数)

<u>Remark 4</u>　$r=1$ ([E-S /]) の時は,

$$\sum_n P(M(1,-1,n),z)t^n = \prod_{d\geq 1} Z_{z^2}(\mathbb{P}^2,\ z^{2(d-1)}t^d)$$

<u>Cor 5</u>　n を動かした時 第 i th Betti 数 $b_i(M(2,-1,n))$ は $n-1 \geq \frac{i}{2}$ について一定となり,

$$P(M(2,-1,n),z) \equiv \frac{1-z^2}{\prod_{d\geq 1}(1-z^{2d})^3} \mod z^{2n}$$

$$\left(\equiv P(M(1,-1,n),z) \mod z^n\right)$$

$r=2$の時 $\mathrm{rk}\,R^1\pi_*\mathcal{E}(-2)=\mathrm{rk}\,R^1\pi_*\mathcal{E}=n-1$, $\mathrm{rk}\,R^1\pi_*\mathcal{E}(-1)=n$ となるので、Th 2により、次の自然な全射がある。

$$\varphi:\mathbb{Z}[a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},b_1,\cdots,b_n,c_1,\cdots,c_{n-1}]\twoheadrightarrow H^*(M(2,-1,n),\mathbb{Z})$$

ただし a_i, b_i, c_i は degree $2i$ の不定元

さて $\ker\varphi$ は Th 1により a_1, b_1, c_1 の linear な関係式をもつ。

ところで 多項式環 $\mathbb{Z}[x_2\, x_3,\cdots, y_1, y_2,\cdots, z_1, z_2,\cdots]$

ただし x_i, y_i, z_i の degree $=2i$ を $\bigoplus_{i\geq 0} R_{2i}$ と斉次部分に分解した時、容易に $\sum_{i\geq 0}\mathrm{rk}\,R_{2i}\cdot z^{2i}=(1-z^2)/\prod_{d\geq 1}(1-z^{2d})^3$ となることがわかる。これら と Cor 5を合わせると、$\ker\varphi$ の元は a_1, b_1, c_1 の linear な関係式と次数が n 以上のもので生成される事がわかる。

<u>Remark 6</u> $p(M(2,-1,n),z)\equiv p(M(1,-1,n),z) \mod z^n$ は Th 2からいかにも成立しそうである。彼らは $H^*(M,\mathbb{Z})$ の生成元の関係式を求める方法についても[E-S 3]の中に述べているので、それを使っても Cor 5は示されると思う。尚、asymptotic な Betti 数の挙動が rank によらず同じになるということはかなり一般の曲面で成立するのではと個人的には思っている。($r\leq 2$ で、曲面の小平次元が $-\infty$ の時には適当な条件の下 正しいようである)

Th 3の証明の方針.

$M(2,-1,n)$を簡単のため以下$M(-1,n)$とかく。Maruyamaは$M(-1,n)$を$\mathbb{Z}$上構成し、しかもsmooth projective varietyとなるので（[M 2]）Weil予想を利用してBetti数を計算する事ができる。Weil予想を利用してBetti数を求めるという考えは、曲線上のstable vector bundleのmoduliの場合にHarder-Narasimhan（[H-N]）が利用し，曲面のHilbert schemeの場合にGöttsche [G] が利用している。簡単な例を1つあげる。

$\mathbb{P}^2$の$\mathbb{F}_q$-有理点の集合を$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$とかくと、

$$\#\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q) = q^2 + q + 1 \qquad \text{ここで } \#\mathbb{F}_q = q$$

すると　　　Weil予想（特に絶対値予想）　$q = z^2$

$$P(\mathbb{P}^2, z) = z^4 + z^2 + 1$$

このように$\mathbb{F}_q$-有理点を数えることにより$M(-1,n)$のBetti数を計算できるわけである。以下$M(-1,n)$の有理点、つまり有限体上定ぎされたstable sheafを数える方法を説明する。

まず$E \in M(-1,n)(\mathbb{F}_q)$に対しdouble dual $E^{\vee\vee}$を考えると、次の完全列が得られる。

$$0 \to E \to E^{\vee\vee} \to E^{\vee\vee}/E \to 0$$

ところで$c_1(E) = -1$ゆえ$E^{\vee\vee}$はstable vector bundleとなる又$\mathrm{supp}(E^{\vee\vee}/E)$は有限となるから，quotient $E^{\vee\vee} \to E^{\vee\vee}/E$を与えるには，$\mathrm{supp}(E^{\vee\vee}/E) = \{p_1, \cdots, p_m\}$とquotient.

$E^W_{p_i} \to (E^W/E)_{p_i}$ を与えればよく、stable sheafの数え上げは次の２つに分かれる。

(1) stable vector bundleの数え上げ

(2) quotient $\mathcal{O}_p^{\oplus 2} \to A$, A: Artinian $\mathcal{O}_p$-module $p \in \mathbb{P}^2$
の数え上げ.

さて(1)、(2)の計算で最も重要な働きをするのが、以下説明するように$\mathbb{P}^1$上のline bundleに沿ったelementary transformationである。elementary transformationと書くと長いので、以下基本変換と書くことにする。尚、この考えはもともとは直線$l \subset \mathbb{P}^2$上のline bundleに沿った基本変換を通してChern類の異なる２つのmoduli spaceの間の関係を調べるという丸山先生の考えがきっかけとなっています。

(1) Ellingsrud-Strømmeの方法を使う。

$p: \hat{\mathbb{P}}^2 \to \mathbb{P}^2$ を$\mathbb{P}^2$の1点blowing-up, Cをpの例外因子とする。又 $q: \hat{\mathbb{P}}^2 \to \mathbb{P}^1$を自然なfibration, fをqのfibreとする。

$$\begin{tikzcd} \hat{\mathbb{P}}^2 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{P}^2 \\ \mathbb{P}^1 & \end{tikzcd}$$

Eを$\mathbb{P}^2$上のrank 2 vector bundleで$c_1(E) = -1$であるものとする。p^*Eを考える。ηを$\mathbb{P}^1$のgeneric point

とし、p^*E を g の generic fibre $g^{-1}(\eta)$ ($\simeq \mathbb{P}^1_{g^{-1}(\eta)}$) に制限する。

すると、$p^*E|_{g^{-1}(\eta)} \cong \mathcal{O}_{g^{-1}(\eta)}(a) \oplus \mathcal{O}_{g^{-1}(\eta)}(-a-1) \quad a \geq 0$

よって次の完全列が得られる (Harder-Narasimhan-filtration)

$$0 \to \mathcal{O}_{g^{-1}(\eta)}(aC) \to p^*E|_{g^{-1}(\eta)} \to \mathcal{O}_{g^{-1}(\eta)}(-(a+1)C) \to 0$$

これを $\hat{\mathbb{P}}^2$ にのばして、

$$0 \to \mathcal{O}(D) \to p^*E \to \mathcal{I}_Z(D') \to 0.$$

$D = aC - bf$, $D' = c_1(E) - D$, $\mathcal{I}_Z$: ideal sheaf of Z

なる完全列が得られる。これから $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_Z(D'), \mathcal{O}(D))$ を考えても良いし、次のように考えてもよい。(本質的に同じ) $Z \neq \phi$ 時

$Z \cap l \neq \phi$ となる g の fibre l をとる。すると $\mathcal{I}_Z \mathcal{O}_l \simeq \mathcal{O}_l(-d)$

$d > 0$ E_1 を自然な全射 $\varphi : p^*E \to \mathcal{I}_Z(D')|_l \to \mathcal{O}_l(D'-d)$ で

定まる基本変換、つまり $E_1 = \ker\varphi$ とする。すると E_1 に対し

次の完全列がある。

$$0 \to \mathcal{O}(D) \to E_1 \to \mathcal{I}_{Z_1}(D'-f) \to 0$$

この時 $\deg Z > \deg Z_1$ かつ $Z \supset Z_1$

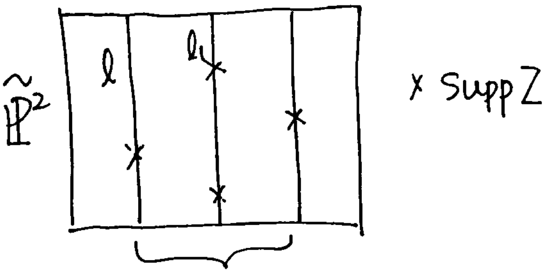
この E_1 に対し $Z_1 \neq \phi$ なら、$Z_1 \cap l_1 \neq \phi$ となる fibre l_1 で同様な基本変換をほどこす。つまり $\varphi_1 : E_1 \to \mathcal{I}_{Z_1}\mathcal{O}_l(D')$ とし、

$E_2 = \ker\varphi_1$ とおく。これをくり返すと $E, E_1, E_2, \cdots, E_n$

と $Z \supset Z_1 \supset Z_2 \supset \cdots$ なる系列を得るが、いずれ $Z_m = \phi$ となる。つまり E_m に対しては、

$$0 \to \mathcal{O}(D) \to E_n \to \mathcal{O}(D'-nf) \to 0$$

なる完全列を得る。



このfibreで $\mathbb{P}(E_i)$ の minimal section に関し基本変換を行う。

E から $E_1, E_2, \cdots, E_n$ を得る手続きは標準的なものであり，E に対して $E_1, \cdots, E_n$ は一意的に定まる。よって E は逆に E_n を適当なfibreで基本変換したものと考える事ができ、この事を使うと、$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(D'-nf), \mathcal{O}(D))$ と基本変換のえらび方に関する情報から E が復活できる。(これで曲線の場合にはなかった codim 2 に関する部分が統制できたことになる。)

<u>Remark 7</u>　Langton [L] (Maruyama [M 1, 2]) は基本変換を使って moduli が proper である事を示した (もちろん semi-stable の範囲で考える。) この手法は上の手法と同じである。従って，$\pi : X \to C$ を smooth projective surface から smooth curve への smooth fibration とした時 generic fibre に制限した時の形からある程度定まる X 上の標準的 vector bundle とその基本変換として X 上の一般の vector bundle はとらえる事ができる。特に fibre が $\mathbb{P}^1$ の時は，標準的 vector bundle として，

$\pi^* E$, EはC上のvector bundle 又は、完全列

$0 \to \mathcal{O}(D) \to E \to \mathcal{O}(D') \to 0$　ただし $(D\cdot f) > (D'\cdot f)$

fはπのfibre

で定まるvector bundleがとれる。尚[M4]も参照.

Remark 8　土基氏に教えて頂いた事だが，曲線の場合にstable vector bundleを数えるのに使うHarder−Narasimhanの方法も基本変換とみなせる。従って曲面の場合も基本変換にこだわるのは自然な考えだと思える。ただ曲線の場合と異なり、基本変換の中心ののっている因子の取り方が難かしい。たとえば、2つの因子D_1, D_2の上のline bundleに沿った基本変換を行う場合，$(D_1\cdot D_2)=0$でないと，互いに影響を及ぼしあって都合が悪い。又因子はsmoothでないと難かしいので，smooth fibrationのある曲面でしかも基本変換はfibre方向に行うことになる。もちろん横方向の基本変換は考えていないので，あとは他の方法を利用する事になる。これがRemark 7の方法である。又$\mathbb{P}^2$代わりに$\hat{\mathbb{P}}^2$で考えるのもこれらのことから自然である。

これらの事から$\hat{\mathbb{P}}^2$上(一般にruled surface上，ただしample divisor Hは$(H\cdot K_X)<0$となるようにとる。)のrank 2 stable vector bundleの数が数えられる事がわかる。さてこの様にして数えたvector bundleの中で$\mathbb{P}^2$から来るものを区別するのは難かしい。しかし例外因子上のline bundleに沿った基本変換を通して$\hat{\mathbb{P}}^2$上のstable vector bundle（適当なpolarizationで考える。）と$\mathbb{P}^2$上のstable vector bundleは対応がつく。以下これを説明する。

(X, H)をsmooth projective surface Xとample divisor H on Xの組とする。$M_H(c_1, c_2)_0$をH-stable vector bundle on Xのなすmoduli spaceとする。$\phi: \hat{X} \to X$をXの1点blowing-up Cをϕの例外因子とする。すると、

$$\phi^*: M_H(c_1, c_2)_0 \hookrightarrow M_{lH-C}(c_1, c_2)_0 \qquad l \gg 0$$

$$M_{lH-C}(c_1, c_2)_0 = M_{H_\infty}(c_1, c_2)$$ とかく。

$(c_1 \cdot H)$が奇数とする。$\mathbb{P}^2$上のstable vector bundleを数えるには次を示せば十分である。

<u>Prop 9</u>　上の仮定の下.

$$\sum_n \# M_{H_\infty}(c_1, n)_0(\mathbb{F}_q)t^n = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n(2n-1)} t^{n^2}\right) \prod_{d\geq 1} \frac{1-q^{2d-4}t^{d}}{1-q^{2d-1}t^{d}}$$

$$\times \left(\sum_n \# M_H(c_1, n)_0(\mathbb{F}_q) t^n\right)$$

<u>証明の idea</u> 基本的には前と同じである。つまり
$E \in M_{H_\infty}(c_1, n)_0$ に対し $E|_C \simeq \mathcal{O}_C(d_0) \oplus \mathcal{O}_C(-d_0)$, $d_0 > 0$ とする。自然な全射 $\varphi_0 : E \to \mathcal{O}_C(-d_0)$ の kernel を E_1 とおくと、E_1 は E の $\mathcal{O}_C(-d_0)$ に沿った基本変換となる。$E_1|_C \simeq \mathcal{O}_C(d_1+1) \oplus \mathcal{O}_C(-d_1)$ $d_1 \geq 0$ に対し $\varphi_1 : E_1 \to \mathcal{O}_C(-d_1)$ とおく。又 $E_2 = \ker \varphi_1) \otimes \mathcal{O}(C)$ とおく。$E_2|_C \simeq \mathcal{O}_C(d_2) \oplus \mathcal{O}_C(-d_2)$ $d_2 > 0$ なら $E_3 = \ker($ $E_2 \to \mathcal{O}_C(-d_2))$ とおき、$E_3|_C \simeq \mathcal{O}_C(d_3+1) \oplus \mathcal{O}_C(-d_3)$ $d_3 \geq 0$ なる分解に対し $E_4 = \ker(E_3 \to \mathcal{O}_C(-d_3)) \otimes \mathcal{O}(C)$ とおく。以下これをくり返して、

$$d_0 > d_2 > d_4 > \cdots \geq 0$$
$$c_2(E) > c_2(E_2) > c_2(E_4) > \cdots$$

なる系列を得る。これからある n が存在し、$d_{2n} = 0$ となる。つまり $E_{2n}|_C \simeq \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C$ これは $E_{2n} \in \phi^* M_H(c_1, c_2(E_{2n}))$ を意味する。これから E は $\phi^* M_H(c_1, *)$ の元を例外因子でくり返し基本変換を行うことによって得られる事がわかる。この事を使うと $\sum_n \# M_{H_\infty}(c_1, n)_0(\mathbb{F}_q) t^n$ と $\sum_n \# M_H(c_1, n)_0(\mathbb{F}_q) t^n$ の間の関係がわかり Prop 9 が示される。

(2) quotient の計算

次の Th 10 を示せば十分である。

Th 10

$$\sum_{n\geq 0} \# \mathrm{Quot}^{n}_{\mathcal{O}_P^{\oplus r}/\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_P)}(\mathbb{F}_q)\, t^n = \prod_{a\geq 1}\prod_{b=1}^{r} Z_q(P,\, q^{ra-b}t^a).$$

ここで $Z_q(P,t)=\dfrac{1}{1-t}$ （1点のzeta関数）

Remark 11　$r=1$ の時は Ellingsrud-Strømme [E-S 1] が示した。又 Göttsche [G] は一般のglobalなsurface X の場合は上で P を X に取り替えればよい事を示した。（母関数を使って定式化したのも Göttsche である。）

証明のidea　ideaはいたって簡単今までと全く同じである。まず本当は局所的な問題だが，globalに考えた方が簡単なので，$\mathrm{Quot}^{n}_{\mathcal{O}_P^{\oplus r}/\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_P)}$ の元は $E\subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus r}$，$\mathrm{supp}(\mathcal{O}^{\oplus r}/E)=\{p\}$ 1点，$p\in\mathbb{P}^2$ として考える。p を含む直線 l を1つ固定する。

$E \longrightarrow E|_l/\text{torsion}$ を自然な全射，そのkernelを $E'(-1)$ と書く。すると $E'\in \mathrm{Quot}^{n'}_{\mathcal{O}^{\oplus r}/\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_P)}$　$n'<n$.
よって帰納的に $\mathrm{Quot}^{n}_{\mathcal{O}^{\oplus r}/\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_P)}$ の有理点が数えられる。

最後に Th 3 で個人的に不満な点を述べる。Remark 8 で $\mathbb{P}^2$ を考察するのは自然であると述べたが，できれば，$\mathbb{P}^2$

の中だけで考えたい。というのは、th3 の表現では、実は $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^2)$ の情報と $\mathbb{P}^2$ の点から決まる情報 $Z_{z^2}(\mathbb{P}^2, t)$ による表現となっているので少し不自然に思える。できれば、$\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^2)$ と $Z_{z^2}(\mathbb{P}^2, t)$ だけで書き表わしたいわけである。例外因子の寄与である $\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{2n(2n-1)} t^{n^2}$ は積表示できるので、もし後半の $\sum$ の部分が積表示できれば例外因子の寄与の部分が消えて、もっと自然な形に書き表わす事ができるかも知れない。

参考文献

[D 1] J. M. Drezet, Groupe de Picard des varietes de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, Ann. Inst. Fourier. 38, 3 (1988)

[D 2] J. M. Drezet, Cohomologie des variétés de modules de hauteur nulle, Math. Ann 281 (1988)

[E-S, 1] G. Ellingsrud-S.S. Strømme On the homology of the Hilbert scheme of points in the plane, Invent. Math. 87 (1987)

[E-S, 2] G. Ellingsrud-S.S. Strømme, On generators of the Chow ring of fine moduli spaces on $\mathbb{P}^2$ preprint (1989)

[E-S, 3] G. Ellingsrud-S.S. Strømme, Towards the Chow ring of the moduli space for stable sheaves on $\mathbb{P}^2$ with q = 1 preprint (1991)

[H-N] G. Harder - M.S. Narasimhan, On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves, Math. Ann. 212 (1975)

[G] L. Göttsche The Betti numbers of the Hilbert scheme of points on a smooth projective surface, Math. Ann. 286 (1990)

[L] S. G. Langton, Valuative criteria for families of vector bundles on algebraic varieties, Ann. of Math, 101 (1975)

[M 1] M. Maruyama Openness of a family of torsion free sheaves, J. Math. Kyoto Univ., 16 (1976)

[M 2] M. Maruyama Moduli of stable sheaves II J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978)

[M 3] M. Maruyama, Elementary transformations in the theory of algebraic vector bundles, Lect. Notes in Math. 961 Springer-Verlag 1983

[M4] M. Maruyama, Singularities of the curve of jumping lines of a vector bundle of rank 2 on $\mathbb{P}^2$, Alg. Geom., Proc. of Japan-France Conf., Tokyo and Kyoto 1982, Lect. Notes in Math. 1016 Springer-Verlag (1983)

[M 5] M. Maruyama Instantons and parabolic sheaves, preprint
[Y] K. Yoshioka The Betti numbers of the moduli space of stable sheaves of rank 2 on $\mathbb{P}^2$. preprint